

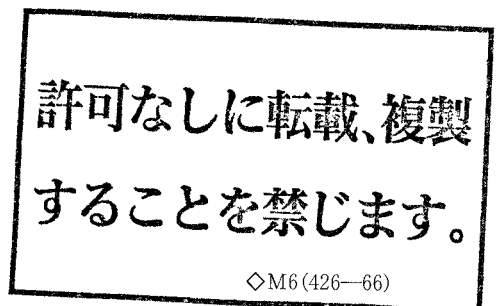
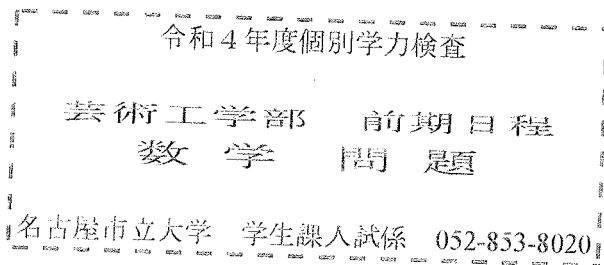
令和4年度・個別学力検査

数 学 (芸工)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 試験開始後、すべての解答用紙に氏名(カタカナ)及び受験番号を記入しなさい。
受験番号が正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。また、氏名(カタカナ)及び受験番号以外の文字、数字などは、絶対に記入してはいけません。
3. 答えは解答用紙の各問題番号の欄に記入しなさい。
4. 解答用紙の裏面には何も書いてはいけません。
5. 試験終了後、問題冊子および下書用紙は持ち帰りなさい。

すべての問題について、答案では求める手順をわかりやすく説明しなさい。



1. $x > 0$ の範囲で定義された関数 $f(x) = \frac{\log x}{x}$ について、次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の増減と極値、曲線 $y = f(x)$ の凹凸と変曲点を調べ、その曲線の概形をかけ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ は証明なく用いてよい。

(2) $m < n$ である自然数 m, n の組で

$$m^n = n^m$$

を満たすものをすべて求めよ。

(3) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = \frac{\log 2}{2}$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

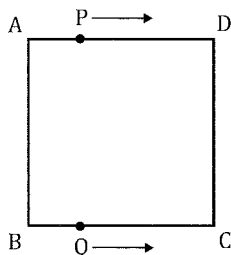
2. 三角形 OAB において、辺 OA, OB, AB の長さをそれぞれ a, b, c とする。三角形 OAB の内接円 C の中心を I とし、辺 OA の中点を L, 辺 OB の中点を M, 辺 AB の中点を N とする。また、直線 IN と直線 LM の交点を P とし、円 C と辺 AB の接点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1) ベクトル \vec{OI} を $a, b, c, \vec{OA}, \vec{OB}$ を用いて表せ。

(2) 線分 AQ の長さを a, b, c を用いて表せ。

(3) ベクトル \vec{OP} を $a, b, c, \vec{OA}, \vec{OB}$ を用いて表し、点 O, P, Q が同一直線上にあることを示せ。

3. 下図のように1辺の長さが1の正方形ABCDがある。また、硬貨を投げて、表ならば2だけ、裏ならば1だけ、この正方形の边上を動く点P, Qを考える。点Pは、頂点Aを出発点とし、時計回りに動く。点Qは、頂点Bを出発点とし、反時計回りに動く。はじめに硬貨を10回投げて点Pのみを動かしたあと、さらに硬貨を10回投げて点Qのみを動かすとき、次の問いに答えよ。



- (1) 点Pを動かし終わったあとに、点Pが頂点A, B, C, Dにある確率をそれぞれ求めよ。
 (2) 点P, Qを動かし終わったあとに、点Pと点Qが異なる頂点にある確率を求めよ。

4. 群に分けられた数列 $\{a_n\}$

$$1, 1 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right| \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \left| \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \right| \frac{1}{16}, \dots$$

に対し、次の問いに答えよ。ただし、第 k 群について各項は 2^{-k+1} であり項数は $k + 2^{k-1}$ である。

(1) a_{500} を求めよ。

(2) 第 k 群の項の総和を S_k とする。 S_k を k で表し、 $\sum_{i=1}^k S_i$ を求めよ。

(3) a_1 から a_{2022} までの和を求めよ。